TEMA 3: DUALIDADE E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

3.1 DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Todo o problema de programação linear, a que chamamos ***primal***, tem associado a ele um correspondente problema, chamado ***dual***; ambos são complementares e relacionados de forma que a solução óptima de um fornece informações completas sobre o outro.

Seja dado o seguinte problema de programação linear, na forma literal ou canónica, problema **primal.**

O seu problema **dual** pode ser escrito na forma canónica da seguinte forma:

Maximizar $z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_mx_m$

Sujeito à
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m \le b_2 \\ ------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nm}x_m \le b_n \\ x_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m} \;\; ; \; j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Minimizar $w = b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3+\ldots+b_ny_n$

Sujeito à
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots + a_{n1}y_n \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{n2}y_n \ge c_2 \\ --------------------- \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + a_{3m}y_3 + \ldots + a_{nm}y_n \ge c_m \\ y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m} \; ; \; j = \overline{1,n} \end{cases}$$

O problema dual, para os modelos em que o conjunto das restrições tem um único tipo de desigualdades por exemplo $\geq$ ou $\leq$, é construído a partir do primal da seguinte forma:

Regra 1. Cada linha do problema primal (restrição), corresponde a uma variável no dual (coluna);

Regra 2. Os termos independentes das restrições (recursos), passam para coeficientes da função objectivo no dual;

Regra 3. Se o primal é um problema de maximização, o seu dual será um problema de minimização e vice- versa;

Regra 4. As variáveis do primal e dual são não negativas.

Problema Primal	**Problema Dual**
n restrições e m variáveis	m variáveis e n restrições
coeficientes da função objectivo	recursos
recursos	coeficientes da função objectivo
Problema maximização	Problema minimização
Problema minimização	Problema maximização
$\max Z = \sum CX$	$\min W = \sum BY$
Suj à $\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$	Suj à $\begin{cases} A^t Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$

Exemplo: Apresentar o problema dual do seguinte problema de maximização de programação linear.

Max $z = 1x_1 + 2x_2$

Sujeito à

$1x_1 + 2x_2 \leq 18$

$2x_1 + 1x_2 \leq 15$

$5x_1 - 2x_2 \leq 20$

$0x_1 + 1x_2 \leq 8$

$x_i \geq 0$

Min $w = 18y_1 + 15y_2 + 20y_3 + 8\ y_3$

$1y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 0y_3 \geq 1$

$2y_1 + 1y_2 - 2y_3 + 1y_3 \geq 2$

$y_i \geq 0$

Algumas aplicações da dualidade

- Já que a resolução dos problemas de minimização pelo método de duas fases, leva muitas iterações, uma alternativa é usar a dualidade para obter a solução primal.
- Resolução rápida dos problemas de programação linear. De facto, em muitos casos o dual tem menos tabelas simplex que o primal, sempre que o número de restrições do primal exceder o número de variáveis.
- Resolução de problemas de teoria de jogos. Na determinação da estratégia óptima e do valor de um jogo de duas pessoas de soma nula, aplicam-se os conceitos da dualidade. Pois, o modelo matemático de um jogo pode ser convertido num problema de programação linear e as estratégias óptimas de cada jogador serão as soluções do primal e do dual.

Resolver o seguinte problema de minimização usando o procedimento dual

Minimizar $W = 3y_1 + 2y_2$

Sujeito à $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ y_1 + y_2 \geq 8 \\ 2y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

Max $Z = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 0y_1 + 0y_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1y_1 + 0y_2 = 3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0y_1 + 1y_2 = 2 \\ x_i ; y_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

Base	x1	x2	x3	y1	y2	bi
y1	1	1	2	1	0	3
y2	2	1	1	0	1	2
Z	-10	-8	-12	0	0	0

1ª Iteração

Base	x1	x2	x3	y1	y2	bi
x3	1/2	1/2	1	1/2	0	3/2
y2	3/2	1/2	0	-1/2	1	1/2
Z	-4	-2	0	6	0	18

2ª Iteração

Base	x1	x2	x3	y1	y2	bi
x3	0	1/3	1	2/3	-1/3	4/3
x1	1	1/3	0	-1/3	2/3	1/3
Z	0	-2/3	0	1/3	8/3	58/3

3ª Iteração – Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	y1	y2	bi
x3	-1	0	1	1	-1	1
x2	3	1	0	-1	2	1
Z	2	0	0	4	4	20

Solução dual : $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1; y_1 = 0; y_2 = 0; Z_{max} = 20$

Solução primal: $y_1 = 4; y_2 = 4; x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 0; W_{min} = 20$

Propriedades operacionais entre o primal e dual

Antes de introduzir a análise de sensibilidade importa referir algumas propriedades que facilitam as operações nas relações entre o problema primal e dual.

Consoderemos o seguinte exemplo:

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Minimizar $W = 14y_1+9y_2+56y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 6 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x3	1	**2**	1	0	0	14
x4	1	1	0	1	0	9
x5	7	4	0	0	1	56
Z	-5	-6	0	0	0	0

1ª iteração

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	1/2	1	1/2	0	0	7
x4	**1/2**	0	-1/2	1	0	2
x5	5	0	-2	0	1	28
Z	-2	0	3	0	0	42

2ª iteração

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Propriedade 1. Em qualquer iteração do método simplex, no primal ou dual, a matriz que aparece sob as variáveis básicas usadas na solução inicial (variáveis de folga, de excesso ou artificiais), pode ser usada para gerar as contribuições unitárias para o valor da função objectivo (coeficientes da última linha do quadro simplex, designados por Δi).

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	1/2	1	1/2	0	0	7
x4	**1/2**	0	-1/2	1	0	2
x5	5	0	-2	0	1	28
Z	-2	0	3	0	0	42

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Base	X1	X2	x3	x4	x5	bi
X2	0	1	1	-1	0	5
X1	1	0	-1	2	0	4
X5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Propriedade 2. Em qualquer iteração do primal ou dual os valores das variáveis na base podem ser obtidos pela multiplicação da matriz definida na propriedade 1, pelo vector coluna contendo os valores originais dos recursos (vector dos termos independentes).

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	1/2	1	1/2	0	0	7
x4	**1/2**	0	-1/2	1	0	2
x5	5	0	-2	0	1	28
Z	-2	0	3	0	0	42

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Base	X1	X2	x3	x4	x5	bi
X2	0	1	1	-1	0	5
X1	1	0	-1	2	0	4
X5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Propriedade 3. Em qualquer iteração do primal ou dual, os coeficientes de qualquer variável nas restrições podem ser obtidos pela multiplicação da matriz definida na propriedade 1, pelo vector coluna contendo os coeficientes originais da mesma variável nas restrições.

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	1/2	1	1/2	0	0	7
x4	**1/2**	0	-1/2	1	0	2
x5	5	0	-2	0	1	28
Z	-2	0	3	0	0	42

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Base	X1	X2	x3	x4	x5	bi
X2	0	1	1	-1	0	5
X1	1	0	-1	2	0	4
X5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Propriedade 4. Em qualquer iteração do método simplex, a substituição das variáveis duais pelos respectivos multiplicadores do simplex, relativos a variáveis básicas da solução inicial, permite obter os coeficientes da equação Z transformada, pela diferença entre o primeiro membro e segundo das restrições correspondentes do dual.

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	1/2	1	1/2	0	0	7
x4	**1/2**	0	-1/2	1	0	2
x5	5	0	-2	0	1	28
Z	-2	0	3	0	0	42

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Base	X1	X2	x3	x4	x5	bi
X2	0	1	1	-1	0	5
X1	1	0	-1	2	0	4
X5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Resumo

Base	x1	x2	x3	x4	x5	bi
x2	0	1	1	-1	0	5
x1	1	0	-1	2	0	4
x5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

SUMÁRIO

Resolução de problemas de programação linear pelo método dual.

Propriedades Operacionais entre o primal e o dual

TPC: Mulenga, página 54, 55 e 56 (Exercícios 3.1 à 3.6